ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE

CONCOURS 1985

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Il est rappelé aux candidats que l'on tiendra compte dans la correction de la précision des solutions proposées et de la présentation.

La partie II pourra éventuellement être traitée en admettant les résultats de la partie I.

Enfin si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée on désignera par $\sup_{n\geqslant p} X_n$ la borne supérieure de l'ensemble $\{X_n / n \geqslant p\}$ et par $\inf_{n\geqslant p} X_n$ la borne inférieure de ce même ensemble.

I

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k$$

QUESTION 1.

a. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geqslant n} x_p \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geqslant n} y_p$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geqslant n} y_p \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geqslant n} x_p$$

Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle les inégalités précédentes sont des inégalités strictes.

b. Pour tout réel l, déduire des inégalités précédentes que si la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers l la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

QUESTION 2.

Soit $A \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in]1, +\infty[$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs converge vers 0 et vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} [u_n^{1-\alpha} - u_{n+1}\, u_n^{-\alpha}] = A$$

a. Montrer que : $A > 0$.

b. Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$.

c. Déduire de la question 2*b* qu'il existe $K > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit équivalente à $\left(Kn^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Puis étudier la nature de la série Σu_n suivant les valeurs de α.

d. Soit $v_0 \in \mathbb{R}_+$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n}{1+\operatorname{Arg\,ch}\,(1+v_n)}$$

Étudier la convergence de la série Σv_n.

II

f désigne dans cette partie une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

QUESTION 3.

Montrer que si la série Σu_n converge alors $f(0) = 0$.

Dans toute la *partie* II on supposera désormais *que* $f(0)$ *est égal* à 0.

QUESTION 4.

Si $|f'(0)| < 1$ démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout u_0 appartenant à $]0, \alpha[$ la série Σu_n converge.

QUESTION 5.

Si au contraire on suppose que $|f'(0)| > 1$ démontrer que la série Σu_n converge si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = 0$.

QUESTION 6.

On suppose dans cette question que $f'(0) = -1$

Étudier la convergence de la série Σu_n lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad |u_{n+1}| \leqslant |u_n|$

ii. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

En déduire la convergence de la série Σx_n définie par :

$$x_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = -\sin x_n$$

QUESTION 7.

On suppose dans cette question que $f'(0) = 1$, que la suite (u_n) est à termes strictement positifs et converge vers 0.

a. On considère p et q deux réels tels que : $p > q > 0$

Démontrer que si Σu_n^q converge alors Σu_n^p converge et que si Σu_n^p diverge alors Σu_n^q diverge.

b. Soit (x_n) une suite décroissante de réels strictement positifs qui converge vers 0. Étudier la nature de la série $\Sigma \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \right)$.

En déduire, en utilisant la question 7*a*, la nature de la série Σv_n où $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n}{\operatorname{ch} v_n}$.

c. Soit un réel $\alpha > 1$ et $a \in]0, +\infty[$. On suppose que $[x - f(x)]\, x^{-\alpha}$ tend vers a lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Etudier suivant les valeurs de α et de $p \in \mathbb{R}_+^*$ la convergence de la série Σu_n^p.

Si f est la fonction Arctg, étudier la nature de la série Σu_n^2.

d. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que f est k fois dérivable au point $x = 0$ et vérifie :

$$\forall p \in \{2, 3, \ldots, k-1\} \qquad f^{(p)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(k)}(0) < 0$$

Quelle est la nature de Σu_n ? Retrouver grâce à ce résultat la nature de la série Σv_n de la question 7*b*.

QUESTION 8.

On appellera (E), l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2) y = 0 \qquad \text{(E)}$$

Montrer qu'il existe des solutions de (E) développables en série entière au point $x = 0$. Reconnaître ces solutions et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

QUESTION 9.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{\lambda\mu}$ la solution de (E) vérifiant :

$$\varphi'_{\lambda\mu}(0) = \lambda \quad \text{et} \quad \varphi''_{\lambda\mu}(0) = 2\mu$$

On définit la suite (x_n) par $x_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = \varphi_{\lambda\mu}(x_n)$.

A l'aide des résultats précédents déterminer les valeurs de x_0 pour lesquelles on a simultanément : la suite (x_n) est une suite non stationnaire à termes positifs qui converge vers 0 et Σx_n converge.

Résumer cette étude en fonction des valeurs de λ et μ.